الموضوع الرابع:

التمرين الأول:

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$$

1) أحسب كلا من u_1، u_2 و u_3.

2) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$v_n = u_n + \frac{1}{2}$$

أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

3) أ- أحسب المجموع S_n بدلالة n، حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

ب- استنتج المجموع S'_n بدلالة n، حيث:

$$S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

التمرين الثاني:

1) أ- ما هو باقي قسمة 1434 على 7؟

ب- ما هو باقي قسمة 2013 على 7؟

2) ليكن العدد الطبيعي a حيث: $a \equiv 6\ [7]$.

أ- عين باقي قسمة a^3 على 7.

ب- بين أن: $a^3 + 1 \equiv 0\ [7]$.

3) b عدد طبيعي حيث: $b \equiv 4\ [7]$.

- بين أن: $b^3 - 1 \equiv 0\ [7]$.

4) بين دون حساب أن العدد $[1434^3 + 2013^3]$ يقبل القسمة على 7.

التمرين الثالث:

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\mathrm{g}(x) = x^3 + ax^2 + b$$

حيث a و b عددان حقيقيان.

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين العددين الحقيقين x و y اللذين يحققان الجملة التالية:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 4x + y = 13 \end{cases}$$

2) عين العددين الحقيقين a و b حتى يمر المنحنى (C) بالنقطتين $A(-1\,;3)$ و $B(-2\,;5)$، ثم احسب $\mathrm{g}'(0)$ و $\mathrm{g}'(-2)$.

حيث:

g' هي الدالة المشتقة للدالة g.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- أحسب: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- أحسب $f'(x)$ مشتق الدالة f، ثم ادرس اشارته.

جـ- شكل جدول تغيرات الدالة f.

2) بين أن النقطة A نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

3) عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة A.

4) أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

5) باستعمال التمثيل البياني للدالة f حدد مجموعة قيم x التي تحقق:

$$f(x) > 5$$

تصحيح الموضوع الرابع:

التمرين الأول:

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$$

1) نحسب كلا من u_1، u_2 و u_3:

- حساب u_1:

لدينا: $u_1 = 3u_0 + 1$

بالتعويض نجد:

$$u_1 = 16$$

- حساب u_2:

لدينا: $u_2 = 3u_1 + 1$

بالتعويض نجد:

$$u_2 = 49$$

- حساب u_3:

لدينا: $u_3 = 3u_2 + 1$

بالتعويض نجد:

$$u_3 = 148$$

2) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$v_n = u_n + \frac{1}{2}$$

أ- نبرهن أن (v_n) متتالية هندسية ونعين أساسها وحدها الأول:

(v_n) متتالية هندسية أساسها q إذا كان:

$$v_{n+1} = q \times v_n$$

لدينا: $v_n = u_n + \frac{1}{2}$

ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2}$

ولدينا: $u_{n+1} = 3u_n + 1$

ومنه: $v_{n+1} = (3u_n + 1) + \frac{1}{2}$

أي: $v_{n+1} = 3u_n + \frac{3}{2}$

ونكتب: $v_{n+1} = 3\left(u_n + \frac{1}{2}\right)$

ومنه نجد:

$$v_{n+1} = 3 \times v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها:

$$q = 3$$

- حساب الحد الأول v_0:

لدينا: $v_0 = u_0 + \frac{1}{2}$

ومنه نجد:

$$v_0 = \frac{11}{2}$$

ب- نعين عبارة الحد العام v_n بدلالة n، ثم نستنتج عبارة u_n بدلالة n:

- نعين عبارة الحد العام v_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام v_n لمتتالية هندسية أساسها q وحدها الأول v_0 بالعلاقة التالية:

$$v_n = v_0 \times q^n$$

ومنه نجد:

$$v_n = \frac{11}{2} \times 3^n$$

- استنتاج عبارة u_n بدلالة n:

لديناـ: $v_n = u_n + \frac{1}{2}$

ومنه: $u_n = v_n - \frac{1}{2}$

بالتعويض ينتج: $u_n = \frac{11}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$

ومنه نجد:

$$u_n = \frac{1}{2}(11 \times 3^n - 1)$$

3) أ- نحسب المجموع S_n بدلالة n، حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

يحسب مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية بالعلاقة التالية:

$$S_n = \text{الحد الأول في المجموع} \times \frac{\text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}} - 1}{\text{الأساس} - 1}$$

ويحسب عدد الحدود بالعلاقة التالية:

عدد الحدود = دليل الحد الأخير في المجموع − دليل الحد الأول في المجموع + 1

<u>حيث:</u>

- الأساس هو q.
- الحد الأول في المجموع هو v_0.
- دليل الحد الأخير في المجموع هو n.
- دليل الحد الأول في المجموع هو 0.
- عدد الحدود هو $n + 1$.

بالتعويض ينتج: $S_n = v_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

أي: $S_n = \frac{11}{2} \times \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1}$

ومنه نجد:

$$S_n = \frac{11}{4}(3^{n+1} - 1)$$

ب- استنتاج المجموع S'_n بدلالة n، حيث:

$$S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

لدينا: $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

نعوض فينتج:

$$S'_n = \left(v_0 - \frac{1}{2}\right) + \left(v_1 - \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(v_n - \frac{1}{2}\right)$$

ونكتب أيضا:

$$S'_n = (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\right)$$

أي:

$$S'_n = S_n - \frac{1}{2} \times (n + 1)$$

ومنه نجد:

$$S'_n = \frac{11}{4}(3^{n+1} - 1) - \frac{1}{2}(n+1)$$

التمرين الثاني:

1) **أ- نبحث عن باقي قسمة 1434 على 7:**

لدينا: $1434 = 7 \times 204 + \mathbf{6}$

ونكتب: $1434 \equiv \mathbf{6}\ [7]$

إذن باقي قسمة 1434 على 7 هو $\mathbf{6}$.

ب- نبحث عن باقي قسمة 2013 على 7:

لدينا: $2013 = 7 \times 287 + \mathbf{4}$

ونكتب: $2013 \equiv \mathbf{4}\ [7]$

إذن باقي قسمة 1434 على 7 هو $\mathbf{4}$.

2) **ليكن العدد الطبيعي a حيث: $a \equiv 6\ [7]$.**

أ- نعين باقي قسمة a^3 على 7:

لدينا: $a \equiv 6\ [7]$

نضيف العدد (1) لطرفي الموافقة ينتج: $a + 1 \equiv 7\ [7]$

وبما أن: $7 \equiv 0\ [7]$

فإن (حسب خاصية التعدي): $a + 1 \equiv 0\ [7]$

نضيف العدد (-1) لطرفي الموافقة ينتج: $a \equiv -1\ [7]$

وحسب خواص الموافقات: $a^3 \equiv (-1)^3\ [7]$

وبما أن: $(-1)^3 \equiv -1\ [7]$

فإن (حسب خاصية التعدي): $a^3 \equiv -1\ [7]$

ونكتب أيضا: $a^3 \equiv \mathbf{6}\ [7]$

إذن باقي قسمة a^3 على 7 هو $\mathbf{6}$.

ب- نبين أن: $a^3 + 1 \equiv 0\ [7]$.

لدينا مما سبق أن: $a^3 \equiv 6\ [7]$

ونكتب أيضا: $a^3 \equiv -1\ [7]$

نضيف العدد (1) لطرفي الموافقة ينتج: $a^3 + 1 \equiv -1 + 1\ [7]$

ومنه نجد:

$$a^3 + 1 \equiv 0\ [7]$$

3) **b عدد طبيعي حيث: $b \equiv 4\ [7]$.**

- نبين أن: $b^3 - 1 \equiv 0\ [7]$.

لدينا: $b \equiv 4\ [7]$

حسب خواص الموافقات: $b^3 \equiv 4^3\ [7]$

وبما أن: $4^3 \equiv 1\ [7]$

فإن (حسب خاصية التعدي): $b^3 \equiv 1\ [7]$

نضيف العدد (-1) لطرفي الموافقة ينتج: $b^3 - 1 \equiv 1 - 1\ [7]$

ومنه نجد:

$$b^3 - 1 \equiv 0\ [7]$$

4) **نبين دون حساب أن العدد $[1434^3 + 2013^3]$ يقبل القسمة على 7:**

لدينا:

$$\begin{cases} a^3 + 1 \equiv 0\ [7] \\ b^3 - 1 \equiv 0\ [7] \end{cases}$$

بجمع الموافقتين طرف لطرف ينتج:

$$a^3 + b^3 \equiv 0\ [7] \dots (1)$$

- **ولدينا:**

$$\begin{cases} a \equiv 6\ [7] \\ 1434 \equiv 6\ [7] \end{cases}$$

ومنه:

$$a \equiv 1434\ [7]$$

وحسب خواص الموافقات:

$$a^3 \equiv 1434^3\ [7] \dots (2)$$

- **ولدينا:**

$$\begin{cases} b \equiv 4\ [7] \\ 2013 \equiv 4\ [7] \end{cases}$$

ومنه:

$$b \equiv 2013\ [7]$$

وحسب خواص الموافقات:

$$b^3 \equiv 2013^3\ [7] \dots (3)$$

نعوض (2) و (3) في (1) نجد:

$$1434^3 + 2013^3 \equiv 0\ [7]$$

إذن العدد $1434^3 + 2013^3$ يقبل القسمة على 7.

التمرين الثالث:

I) **نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:**

$$g(x) = x^3 + ax^2 + b$$

حيث a و b عددان حقيقيان.

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) **نعين العددين الحقيقيين x و y اللذين يحققان الجملة التالية:**

$$\begin{cases} x + y = 4 \quad \dots (1) \\ 4x + y = 13 \dots (2) \end{cases}$$

بطرح (1) من (2) ينتج: $(4x - x) + (y - y) = (13 - 4)$

أي: $3x = 9$

ومنه نجد:

$$x = 3$$

نعوض قيمة x في المعادلة (1) فنجد:

$$y = 1$$

2) **نعين العددين الحقيقيين a و b حتى يمر المنحنى (C) بالنقطتين $A(-1\,;3)$ و $B(-2\,;5)$، ثم نحسب $g'(0)$ و $g'(-2)$.**

- **نعين العددين الحقيقيين a و b حتى يمر المنحنى (C) بالنقطتين $A(-1\,;3)$ و $B(-2\,;5)$:**

المنحنى (C) يمر بالنقطتين $A(-1\,;3)$ و $B(-2\,;5)$ يعني:

$$\begin{cases} g(-1) = 3 \\ g(-2) = 5 \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} a+b=4 \\ 4a+b=13 \end{cases}$$

سبق حل هذه الجملة بالمجهولين x و y.

ومنه نجد:

$$\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$$

<u>فنكتب:</u>

$$\mathrm{g}(x)=x^3+3x^2+1$$

- نحسب $\mathrm{g}'(0)$ و $\mathrm{g}'(-2)$:

الدالة المشتقة للدالة g هي: $\mathrm{g}'(x)=3x^2+6x$

ونكتب أيضا:

$$\mathrm{g}'(x)=3x(x+2)$$

ومنه نجد:

$$\begin{cases} \mathrm{g}'(0)=0 \\ \mathrm{g}'(-2)=0 \end{cases}$$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=x^3+3x^2+1$$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) أ- نحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

- نحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

لدينا: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3+3x^2+1)$

باعتبار نهاية أكبر أس ينتج: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3)$

ومنه نجد:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

- نحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^3+3x^2+1)$

باعتبار نهاية أكبر أس ينتج: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^3)$

ومنه نجد:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

ب- نحسب $f'(x)$ مشتق الدالة f، ثم ندرس اشارته:

- نحسب $f'(x)$ مشتق الدالة f:

الدالة المشتقة للدالة f هي:

$$f'(x)=3x^2+6x+0$$

ومنه نجد:

$$f'(x)=3x(x+2)$$

- ندرس اشارة $f'(x)$:

نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f'(x)=0$

أي: $3x(x+2)=0$

ومنه نجد:

$$\begin{cases} x=-2 \\ \text{أو} \\ x=0 \end{cases}$$

نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول التالي:

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$3x$	$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$3x(x+2)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

الدالة f متزايدة تماما من أجل: $x\in]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$

الدالة f متناقصة تماما من أجل: $x\in]-2;0[$

جـ- نشكل جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2) نبين أن النقطة $A(-1;3)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f):

الدالة المشتقة الثانية للدالة f هي:

$$f''(x)=6x+6$$

ونكتب أيضا:

$$f''(x)=6(x+1)$$

نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f''(x)=0$ فنجد:

$$x=-1$$

<u>ولدينا:</u>

$$f(-1)=3$$

إذن النقطة $A(-1;3)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

3) نعين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة A:

تعرف معادلة المماس (Δ) بالعلاقة التالية:

$$(\Delta): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

<u>حيث:</u>

$$x_0=-1$$

ومنه:

$$(\Delta): y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$$

<u>حيث:</u>

$$\begin{cases} f'(-1)=-3 \\ f(-1)=3 \end{cases}$$

بالتعويض ينتج:

$$(\Delta): y=-3(x+1)+3$$

ومنه نجد:

$$(\Delta): y=-3x$$

4) نرسم المماس (Δ) والمنحنى (C_f):

- لرسم المماس (Δ) يكفي تعيين نقطتين اعتبارا من المعادلة:

$$(\Delta): y=-3x$$

x	0	-1
y	0	3

فيصبح المماس (Δ) معرف بالنقطتين $O(0\,;0)$ و $A(-1\,;3)$.

● **لرسم المنحنى (C_f) نأخذ بعين الاعتبار ما يلي:**

- **المنحنى (C_f) يمر بالنقطتين:**

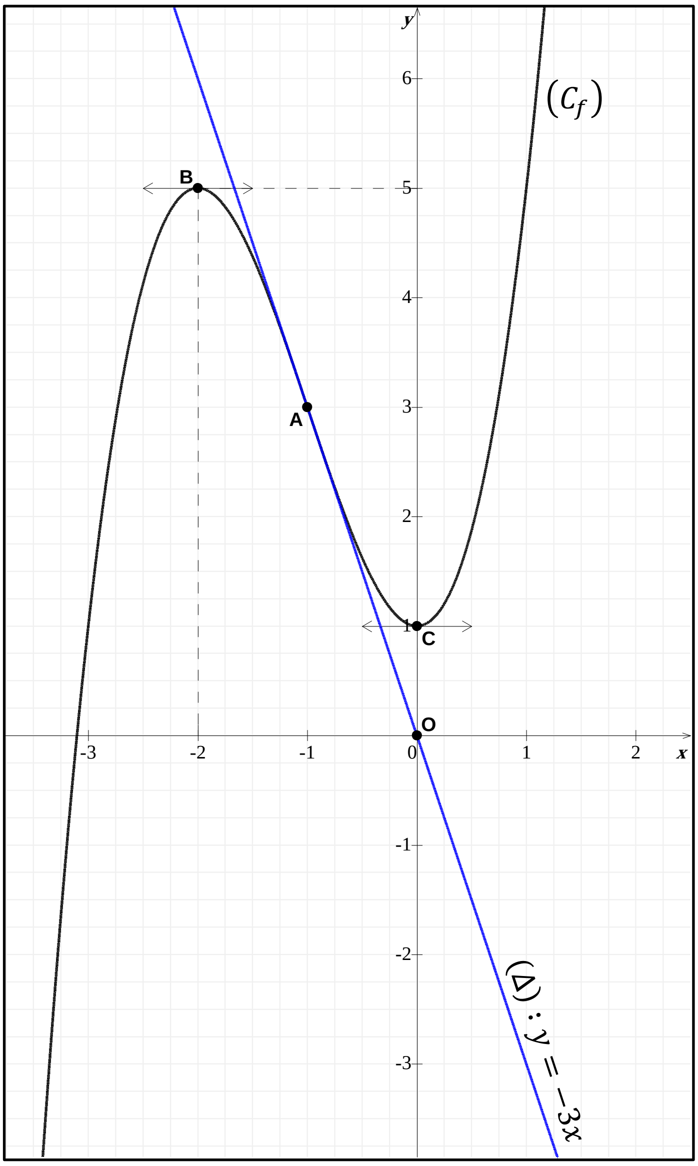
$A(-1\,;3)$ و $B(-2\,;5)$

- **نقطة انعطاف المنحنى (C_f):**

$A(-1\,;3)$

- **القيم الحدية للمنحنى (C_f):**

$B(-2\,;5)$ و $C(0\,;1)$



التمثيل البياني للدالة f

5) **باستعمال التمثيل البياني للدالة f نحدد مجموعة قيم x التي تحقق:**

$$f(x)>5$$

مجموعة قيم x هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيمات التي تحقق:

$$y>5$$

من التمثيل البياني للدالة f نلاحظ أن:

جميع المستقيمات التي تحقق $y>5$ تقطع المنحنى (C_f) في نقطة وحيدة x حيث:

$$x>1$$

ومنه مجموعة قيم x التي تحقق $f(x)>5$ هي:

$$x\in\,]1\,;+\infty[$$

حظ سعيد

05 56 24 69 06
bouguetof.hamid@yahoo.fr